Ecole créée par et pour les entreprises

EPMI Cergy
ECOLE D'INGENIEURS

Grande Ecole d'Ingénieurs avec prépa intégrée
Etablissement d'Enseignement Supérieur Privé reconnu par l'Etat
Membre de la FESIC et du Groupe ECAM
Diplôme d'Ingénieur reconnu par la CTI - Master's Degree

Transformée de Laplace

Dr. K. LABADI Cours d'Automatique 2008/2009 (1ère année Ingénieur)

Plan

- Transformée de Laplace
- Propriétés de Transformée de Laplace
- Transformée inverse
- Application aux équations différentielles

Introduction

L'étude des systèmes continus nécessitent des opérations pouvant être complexes dans le domaine temporel :

- Résolution des équations différentielles
- Dérivation
- Intégration
- Produit de convolution; …

- En lieu de travailler dans le domaine temporel, on va travailler dans un autre domaine où ces opérations deviennent plus simples.

→ **Transformée de Laplace**

Transformée de Laplace

Il s'agit d'un outil mathématique utilisé en automatique continue pour :

- La résolution des équations différentielles
- Le calcul de la fonction de transfert d'un système
- L'analyse de la réponse d'un système
- L'analyse des performances d'un système

Idée

$f(t)$ —— Transformée de Laplace ——> $F(p)$

$$F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot d(t)$$

- F(p) est appelée transformée de Laplace de f(t)
- Notations:

$$\boxed{f(t) \xrightarrow{TL} F(p)} \qquad \boxed{F(p) = TL\left\{f(t)\right\}}$$

Transformée de Laplace

Définition

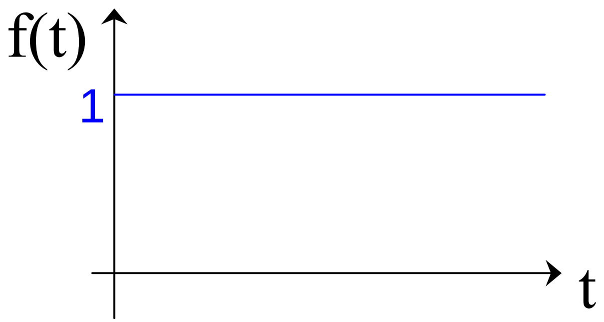
- Soit ***f*** une fonction continue et supposée nulle pour $t < 0$
- On appelle Transformée de Laplace de ***f***, la fonction **F(p)** définie par:

$$\boxed{F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot d(t)}$$

où p est une variable complexe

Exemple 1

- TL d'un échelon unitaire : $f(t) = u(t), \ t \geq 0$

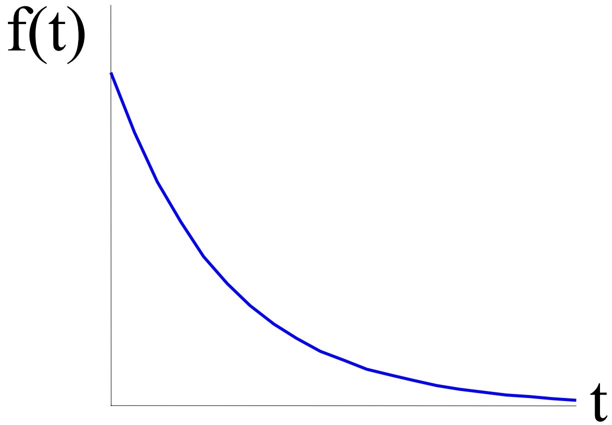


$$TL\{f(t)\} = \int_0^{\infty} 1 \times e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{TL\{u(t)\} = \frac{1}{p}}$$

Exemple 2

- TL de la fonction : $f(t) = e^{-at} \quad , t \geq 0$



$$TL\left\{e^{-at}\right\} = \int_0^{\infty} \left(e^{-at}\right) \cdot e^{-pt} dt = \left. \frac{-\,e^{-(a+p)t}}{p+a} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}$$

$$\boxed{TL\left\{e^{-at}\right\} = \frac{1}{p+a}}$$

Table des TL

- Pour éviter de faire des calculs d'intégrales, nous disposons d'une table contenant les transformées de Laplace des **fonctions usuelles**.

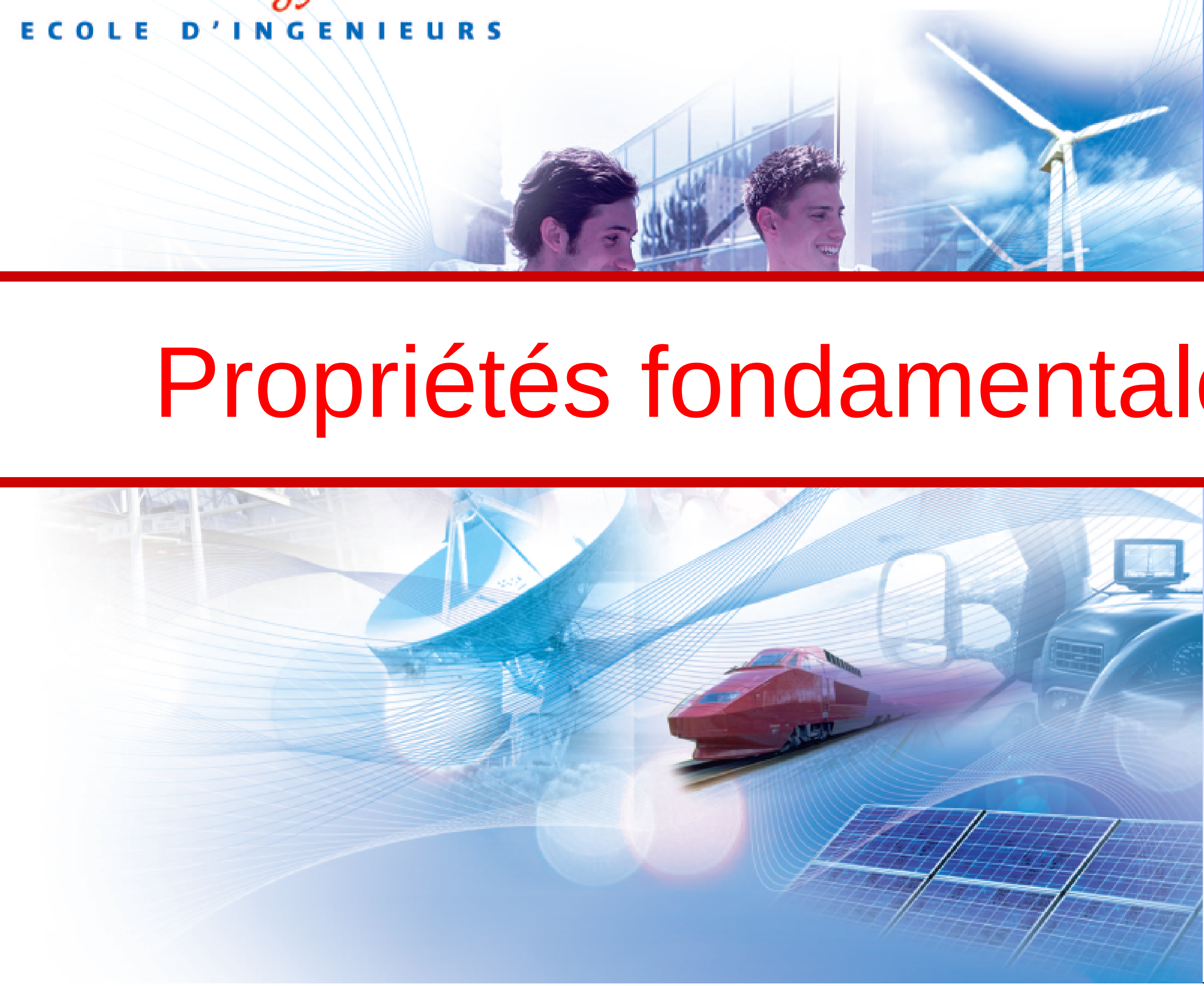
- Nous utilisons un ensemble de propriétés permettant le calcul des TL des fonctions plus complexes (qui n'apparaissent pas dans la table)

f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$
$A\cdot\Gamma(t)$	$\frac{A}{s}$
A t	$\frac{A}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}} \quad (n \geq 0)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t\cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at}\cdot f(t)$	$F(s+a)$
$\sin(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$sh(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cos(\omega\cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$ch(\omega\cdot t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$e^{-at}\cdot\sin(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cdot sh(\omega\cdot t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2}$
$e^{-at}\cdot\cos(\omega\cdot t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cdot ch(\omega\cdot t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2-\omega^2}$
$\sin(\omega\cdot t+\varphi)$	$\frac{s\cdot\sin(\varphi)+\omega\cdot\cos(\varphi)}{s^2+\omega^2}$

Ecole créée par et pour les entreprises

EPMI Cergy
ECOLE D'INGENIEURS

Grande Ecole d'Ingénieurs avec prépa intégrée
Etablissement d'Enseignement Supérieur Privé reconnu par l'Etat
Membre de la FESIC et du Groupe ECAM
Diplôme d'Ingénieur reconnu par la CTI - Master's Degree



Propriétés fondamentales

Propriétés

Addition

$$TL[f(t) + g(t)] = F(p) + G(p)$$

- **Exemple:** Déterminer la TL de: $f(t) = \cos t - u(t)$

- **Table des TL** $\Rightarrow \begin{cases} TL\{\cos t\} = \dfrac{p}{p^2+1} \\ TL\{u(t)\} = \dfrac{1}{p} \end{cases} \Rightarrow TL\{f(t)\} = \dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{1}{p}$

Propriétés

Linéarité

$$\mathrm{TL}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] \; = a \cdot F(p) + b \cdot G(p)$$

- **Exemple:** Déterminer la TL de: $f(t) = 2\sin t - 3\cos t$

- **Table des TL** $\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{TL}\{\cos t\} = \dfrac{p}{p^2+1} \\ \mathrm{TL}\{\sin t\} = \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{TL}\{f(t)\} = \dfrac{2}{p^2+1} - \dfrac{3p}{p^2+1}$

Propriétés

Dérivation

$$TL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0)$$

- **Exemple: Déterminer la TL de f(t) = (sin t)'**

$$TL\left\{\frac{d(\sin t)}{dt}\right\} = p \cdot TL\{\sin t\} = p \cdot \frac{1}{p^2+1}$$

« Dériver c'est multiplier par p »
Cette propriété, qui fait la richesse de la TL sera largement utilisée dans les équations différentielles

Propriétés

Formule générale de la Dérivation

$$TL[\frac{df^n(t)}{dt^n}] = p^n \cdot F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{(n-1-i)} \cdot f^i(0)$$

Autrement :

$$TL[\frac{df^n(t)}{dt^n}] = p^n \cdot F(p) - (p^{n-1} \cdot f(0)) - (p^{n-2} \cdot f^1(0)) - \ldots - (p^0 \cdot f^{n-1}(0))$$

$$TL[\frac{df^2(t)}{dt^2}] = p^2 \cdot F(p) - pf(0) - f'(0)$$

Propriétés

Intégration

$$TL[\int_0^t f(t)\cdot dt] = \frac{F(p)}{p}$$

- **Exemple:** **déterminer la TL de** $f(t) = \int (\sin t)\cdot dt$

$$TL\{\int(\sin t)dt\} = \frac{TL\{\sin t\}}{p} = \frac{1}{p\cdot(p^2+1)}$$

Formule générale

$$TL\left[\int\int\int\ldots\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p^n}$$

Théorème du retard (1)

Retard temporel

$$TL[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} \cdot F(p)$$

- **Exemple:** **déterminer la TL de f(t) = u(t - 3)**

$$TL\{u(t)\} = \frac{1}{p} \Rightarrow TL\{u(t-3)\} = \frac{e^{-3p}}{p}$$

Théorème du retard (2)

Retard fréquentiel

$$TL[e^{a \cdot t} \cdot f(t)] = F(p - a)$$

- **Exemple:** **déterminer la TL de f(t) = e^{2t} (cos t)**

$$TL\{\cos t\} = \frac{p}{p^2+1} \quad \Rightarrow TL\{e^{2t}\cos t\} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1}$$

Théorèmes

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \to 0^+} [f(t)] = \lim_{p \to \infty} [p \cdot F(p)]$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to +\infty} [f(t)] = \lim_{p \to 0} [p \cdot F(p)]$$

Convolution

$$TL[f_1 * f_2] = F_1(p) \cdot F_2(p)$$

Ecole créée par et pour les entreprises

EPMI Cergy
ECOLE D'INGENIEURS

Grande Ecole d'Ingénieurs avec prépa intégrée
Etablissement d'Enseignement Supérieur Privé reconnu par l'Etat
Membre de la FESIC et du Groupe ECAM
Diplôme d'Ingénieur reconnu par la CTI - Master's Degree

Transformée Inverse

Transformée inverse

- L'inverse de la Transformée de Laplace consiste à déterminer la fonction originale f(t) à partir de sa transformée de Laplace F(p).

$$f(t) = TL^{-1}\{F(p)\}$$

- **Exemples :**

$$F(p) = \left[\frac{1}{p}\right] \Rightarrow f(t) = TL^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = u(t)$$

$$F(p) = \left[\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\right] \Rightarrow f(t) = TL^{-1}\left\{\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\right\} = e^{-2t}\cos t$$

Transformée inverse

Méthode 1:

En principe, la **transformée inverse** de Laplace est obtenue en solutionnant cette intégrale:

$$f(t) = TL^{-1}\left\{F\left(p\right)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{C} F(p) \cdot e^{p \times t} dp$$

Méthode 2:

Méthode des résidus

Méthode 3:

Décomposition en éléments simples et utilisation de la table

Méthode des résidus

1

Calcul des pôles de F(p): les valeurs qui annulent le dénominateur de F(p). C'est-à-dire: F(p) = N(p)/D(p) on cherche D(p) = 0

2

Calcul des résidus

soit « **a** » un pôle de F(p)

- Si a est un pôle simple: $r_a = \lim\limits_{p \to a} (p - a) \cdot F(p) \cdot e^{pt}$
- Si a est un pôle d'ordre n: $r_a = \lim\limits_{p \to a} \dfrac{1}{(n-1)!} \cdot \dfrac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left\{ (p - a)^n \cdot F(p) \cdot e^{pt} \right\}$

3

Calcul de f(t):

☞ Pour chaque pôle a de **F(p)**, calculer le résidu r_a

☞ $f(t) = \sum$ résidus

Méthode des résidus

Exemple: Déterminer f(t) correspondant à: $\boxed{F(p)=\dfrac{p+2}{p(p+1)^2}}$

- Déterminer les pôles de F(p):

$$D(p)=0 \;\Leftrightarrow\; p\cdot(p+1)^2=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Pôle simple : } p=0 \\ \text{Pôle double : } p=-1 \end{array}$$

- Calcul des résidus:

Pôle simple : p = 0

$$\Longrightarrow \quad r_0=\lim_{p\to 0}\left(p\text{-}0\right)\times\frac{p+2}{p(p+1)^2}\times e^{pt} = 2$$

Pôle double : p = -1

$$\Longrightarrow \quad r_{-1}=\lim_{p\to -1}\frac{1}{\left(2-1\right)!}\cdot\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}}\left\{\left(p+1\right)^2\cdot\frac{p+2}{p(p+1)^2}\cdot e^{pt}\right\}=(-2-t)e^{-t}$$

- La fonction f(t): $f(t)=r_0+r_{-1}=2+(-2\ \text{-}t)\cdot e^{-t}$

Décomposition en éléments simples

Le principe de cette méthode consiste à écrire la fonction F(p) sous forme d'éléments simples pouvant être identifiés dans la table donnant les transformées de Laplace des fonctions usuelles

Exemple: Déterminer f(t) correspondant à : $F(p)=\dfrac{1}{p^2+3p+2}$

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{-1}{p+2}$$

Table des TL $\Rightarrow$ $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

Ecole créée par et pour les entreprises

EPMI Cergy
ECOLE D'INGENIEURS

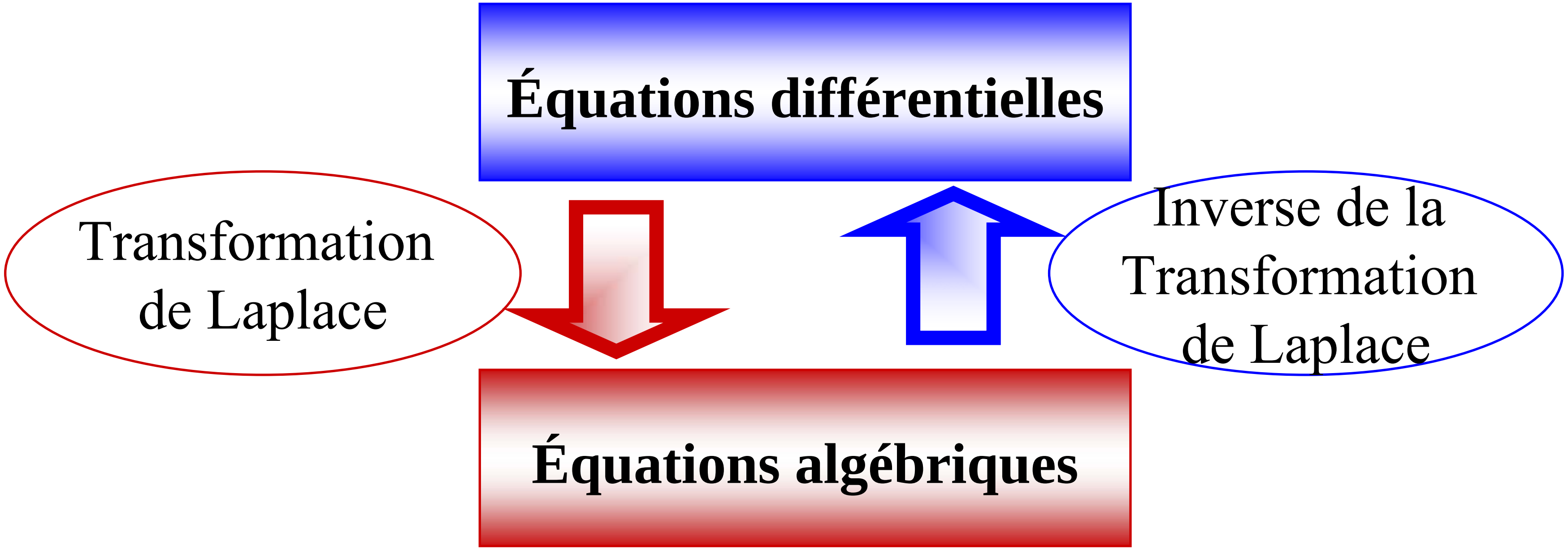
Grande Ecole d'Ingénieurs avec prépa intégrée
Etablissement d'Enseignement Supérieur Privé reconnu par l'Etat
Membre de la FESIC et du Groupe ECAM
Diplôme d'Ingénieur reconnu par la CTI - Master's Degree

Application aux équations différentielles

Dr. K. LABADI Cours d'Automatique 2008/2009 (1ère année Ingénieur)

Intérêt de la TL

- La Transformée de Laplace permet de transformer un problème différentiel en un problème algébrique.



- La recherche de la solution de l'équation différentielle se limite alors, à partir du polynôme, à la recherche dans une table de la forme type de la solution.

Équations différentielles

La résolution d'équations différentielles en utilisant transformée de Laplace consiste en la réalisation des étapes suivante:

1. Transformer l'équation différentielle en équation algébrique par l'application de la transformée de Laplace.
2. Résoudre l'équation pour la variable dépendante dans le domaine de Laplace
3. Réaliser la transformée inverse

- Rappelons la propriété de dérivation:

$$\boxed{TL[\frac{df^n(t)}{dt^n}] = p^n \cdot F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{(n-1-i)} \cdot f^i(0)}$$

Équations différentielles

Exemple:

- Soit à résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 9y(t) = 1$$

CI: $y'(0) = y(0) = 0$

$$TL\left\{\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 9y(t)\right\} = TL\{1\}$$

$$p^2 y(p) + 9y(p) = \frac{1}{p}$$

$$\left(p^2 + 9\right) y(p) = \frac{1}{p}$$

$$y(p) = \frac{1}{p \cdot \left(p^2 + 9\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = TL^{-1}\{Y(p)\}}$$

Équations différentielles

Résolution d'équations différentielles (c.i nulles)

Soit: $a_0 \dfrac{dy^n(t)}{dt^n} + a_1 \dfrac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \dfrac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = f(t)$ avec c.i nulles.

Son équation auxiliaire:

$$a_0 p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \ldots + a_{n-1} p Y(p) + a_n Y(p) = F(p)$$

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n \right) Y(p) = F(p)$$

$$\varphi_n(p) \cdot Y(p) = F(p)$$

La solution est :

$$Y(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)} \qquad \text{et} \qquad y(t) = TL^{-1}\left\{ Y(p) \right\}$$